Aufgabe 1 ($L^p(\mu)$ *ist separabel für* $1 \leq p < \infty$)
Sei μ ein Radonmaß auf einem lokal-kompakten, separablen metrischen Raum (X, d). Beweisen Sie, dass $L^p(\mu)$ im Fall $1 \leq p < \infty$ separabel ist, dass also eine abzählbare dichte Teilmenge existiert.

Aufgabe 2 ($L^\infty(\mu)$ *ist nicht separabel*)
Sei μ endliches Maß auf X. Zeigen Sie:

$$L^\infty(\mu) \text{ separabel} \quad \Leftrightarrow \quad \dim L^\infty(\mu) < \infty.$$

Hinweis. Nehmen Sie an, es gibt eine disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ in messbare Mengen mit $\mu(E_i) > 0$. Zeigen Sie, dass dann $L^\infty(\mu)$ nicht separabel ist.

Aufgabe 3 (*BV-Funktionen*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachten Sie für $f \in L^1(\Omega)$ das Funktional

$$\phi_f : C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ \phi_f(g) = -\int_\Omega f \operatorname{div}(g)\, d\mathcal{L}^n.$$

Die Funktion f heißt von beschränkter Variation auf Ω, kurz $f \in BV(\Omega)$, falls gilt:

$$\sup\{\phi_f(g) : |g| \leq 1 \text{ auf } \Omega\} < \infty.$$

Zeigen Sie: es gibt ein Radonmaß μ_f auf Ω und eine μ_f-messbare Funktion $\nu_f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $|\nu_f| = 1$ für μ_f-fast-alle $x \in \Omega$, so dass gilt:

$$\phi_f(g) = \int_\Omega \langle g, \nu_f \rangle\, d\mu_f \text{ für alle } g \in C^0_c(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Bestätigen Sie $\mu_f = \mathcal{L}^n \llcorner |Df|$ und $\nu_f = \frac{Df}{|Df|}$ für $f \in C^1(\Omega)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 21.11.2011 vor der Vorlesung.